

2. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je konečná.

Označme $M = \{x_1, \dots, x_k\}$ - jelikož je M konečná, tak takové body $x_i \in \mathbb{R}^n$ existují.

Ukažme nejdříve, že je M uzavřená. K tomu je potřeba ukázat, že $H(M) \subseteq M$. Pro spor předpokládejme, že existuje $x \in H(M) \setminus M$. Pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ nalezneme $r_i > 0$ takové, že $x_i \notin B(x, r_i)$ - takové r_i existuje, neb stačí např. vzít $r_i = \frac{\rho(x, x_i)}{2}$.

Definujme $r = \min\{r_1, \dots, r_k\}$. Pak zřejmě $B(x, r) \cap M = \emptyset$, což je v rozporu s tím, že $x \in H(M)$.

Zbývá dokázat omezenost množiny M . Pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ označme $p_i = \rho(0, x_i)$, kde 0 je počátek. Nalezneme $R > \max\{p_1, \dots, p_k\}$. Pak zřejmě $M \subseteq B(0, R)$, což nám dává omezenost množiny M .

Z Věty 12 nyní plyne, že je M kompaktní.

Příklad 1 (b)) $M = [a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$.

Zřejmě jde o uzavřený interval. Co se týče omezenosti, lze snadno vidět, že $M \subseteq B(0, \max\{|a|, |b|\})$.

Z Věty 12 nyní plyne, že je M kompaktní.

Příklad 1 (c) $M = (0, 1)$

Množina M není uzavřená, neb $H(M) = \{0, 1\}$ není obsažena v M .

Z Věty 12 nyní plyne, že není M kompaktní.

Příklad 1 (d) $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$, kde $x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, a $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$.

Abychom ukázali, že je M uzavřená, stačí ukázat, že $y \notin M \implies y \notin H(M)$. Necht' tedy $y \in \mathbb{R} \setminus M$.

Označme $r = \rho(x, y)$. Pak $B(y, \frac{r}{2}), B(x, \frac{r}{2})$ jsou disjunktní. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ t.ž. pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí, že $x_n \in B(x, \frac{r}{2})$, tedy $x_n \notin B(y, \frac{r}{2})$. Necht' $R < \min\{\frac{r}{2}, \rho(y, x_1), \dots, \rho(y, x_{n_0})\}$. Pak $B(y, R) \cap M = \emptyset$, tedy y nemůže být hraničním bodem množiny M dle definice.

Nyní dokažme omezenost množiny M . Označme $q = \rho(0, x)$. Nalezneme $m_0 \in \mathbb{N}$ t.ž. pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq m_0$ platí, že $x_n \in B(x, q + 1)$. Nalezneme $Q > \max\{q + 1, \rho(0, x_1), \dots, \rho(0, x_{m_0})\}$. Pak lze snadno nahlédnout, že $M \subseteq B(0, Q)$, tudíž je M omezená.

Z Věty 12 nyní plyne, že je M kompaktní.

Výše uvedený postup by fungoval i v $\mathbb{R}^k$ pro libovolné přirozené k .

Příklad 1 (e) $M = [x^2 + y^2 = 1]$

Zřejmě M je kružnice o poloměru 1, tedy $M \subseteq B(0, 2)$. Uzavřenost množiny M plyne z Věty 11.

Z Věty 12 nyní plyne, že je M kompaktní.

Příklad 1 (f) $M = [x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2]$

Uzavřenost množiny M plyne z Vět 11 a 2, 5, neb $M = [x^2 + y^2 + z^2 = 1] \cap [x - y^2 - z^2 = 0]$ za využití toho, že funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ a $g(x, y, z) = x - y^2 - z^2$ jsou spojité.

Omezenost množiny M plyne z toho, že zřejmě $M \subseteq B(0, 2)$, jelikož každý bod M je od počátku vzdálen přesně 1.

Z Věty 12 nyní plyne, že je M kompaktní.

Příklad 1 (g) $M = [x^2 + 4y^2 \leq 1, |z| \leq 1]$

Opět uzavřenost množiny M plyne z Vět 11 a 2, 5.

Pokud $x^2 + 4y^2 \leq 1$, pak $x^2 + y^2 \leq y^2 + 4y^2 \leq 1$, tedy $M \subseteq B(0, 1)$. Mn. M je tedy om.

Z Věty 12 nyní plyne, že je M kompaktní.

Příklad 1 (h) $M = [x^2 + y^2 \geq 1]$

Zřejmě $(0, y) \in M$ pro každé $y \in \mathbb{R}$. Z toho plyne, že M není om. Pokud by om. byla, pak by existovalo $r > 0$ takové, že $M \subseteq B(x, r)$. Avšak $(0, r+1) \in M, (0, r+1) \notin B(0, r)$.

Z Věty 12 nyní plyne, že není M kompaktní.

Příklad 1 (i) $M = [x + y = 4]$

Platí $M = [y = 4 - x]$. Tedy $M = \{(x, 4 - x) : x \in \mathbb{R}\}$. Spočtěme si vzdálenost bodu $(x, 4 - x) \in M$ od počátku:

$$\rho((0, 0), (x, 4 - x)) = \sqrt{(x - 0)^2 + (4 - x - 0)^2} = \sqrt{x^2 + x^2 - 8x + 16} = \sqrt{2x^2 - 8x + 16}.$$

Dá se ukázat, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho((0, 0), (x, 4 - x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 - 8x + 16} = \infty$.

Z toho plyne, že pro každé $r > 0$ existuje x blízko nekonečnu takové, že $\rho((0, 0), (x, 4 - x)) > r$. Tedy pro každé $r > 0$ platí, že $M \setminus B(0, r) \neq \emptyset$.

Mn. M proto není om.

Z Věty 12 nyní plyne, že není M kompaktní.

Příklad 1 (j) $M = [x + y \leq 1]$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(x, -x) \in M$. Navíc $\rho(0, (x, -x)) = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$. Z toho lze snadno nahlédnout, že pro každé $r > 0$ platí $M \setminus B(0, r) \neq \emptyset$. Mn. M proto není om.

Z Věty 12 nyní plyne, že není M kompaktní.

Příklad 1 (k) $M = [x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0]$

Zřejmě pro $(x, y) \in M$ platí, že $x, y \in [0, 1]$. Z toho plyne, že $M \subseteq B(0, 2)$ a množina M je tedy om.

Uzavřenost této mn. plyne z Věty 2, 5 a 11.

Z Věty 12 nyní plyne, že je M kompaktní.

Příklad 1 (l) $M = [\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0]$

Uzavřenost M se ověří klasicky.

Nechť $(x, y) \in M$. Pak $\sqrt[4]{x} \leq 1$, tedy $x \leq 1$, tedy $x^2 \leq 1$ a pro y analogicky. Pak $x^2 + y^2 \leq 2 < 3$. Pak $\sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{3} < 3$, tedy $M \subseteq B(0, 3)$ a M je om.

Z Věty 12 nyní plyne, že je M kompaktní.

Příklad 1 (m) $M = [y \geq -1, x + y \leq 1, x - y \geq -1]$

Uzavřenost M se ověří klasicky.

Nechť $(x, y) \in M$. Pak

$$\begin{aligned} y \geq -1 \wedge x - y \geq -1 &\implies x \geq y - 1 \geq -2 \\ x \geq -2 \wedge x + y \leq 1 &\implies y \leq 1 - x \leq 1 + 2 \implies y \leq 3 \\ x + y \leq 1 \wedge y \geq -1 &\implies x \leq 1 - y \leq 2 \implies x \leq 2 \end{aligned}$$

Dostáváme $(x, y) \in M \implies -2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 3$, tedy $\max\{|x|, |y|\} < 4$. Pak $(x, y) \in M \implies \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{4^2 + 4^2} < 16$, tedy $M \subseteq B(0, 16)$ a M je om.

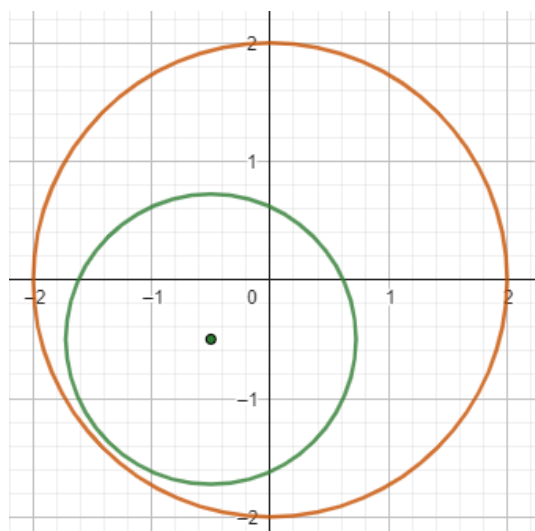
Z Věty 12 nyní plyne, že je M kompaktní.

Příklad 1 (n) $M = [x + y + z = 1, x^2 + y^2 = z]$

Uzavřenost M se ověří klasicky.

Ověřme omezenost množiny M . Nechť $(x, y, z) \in M$.

Jelikož $z = x^2 + y^2$, tak $x + y + x^2 + y^2 = 1$, pomocí doplnění na čtverec dostáváme $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2}$. Tato rovnice předepisuje kružnici, tedy $x^2 + y^2$ je om. Konkrétně zmíněná kružnice má střed v bodě $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ a poloměr $\sqrt{\frac{3}{2}}$, tedy platí, že např. $(x, y) \in B(0, 4)$.



Mn. M je om.

Z Věty 12 nyní plyne, že je M kompaktní.

Příklad 1 (o) $M = [x^2 + 2y^2 = 1, x + y + z = 1]$

Uzavřenost M se ověří klasicky.

Ověřme omezenost množiny M . Nechtě $(x, y, z) \in M$.

Rovnice $x^2 + 2y^2 = 1$ dává elipsu. Dá se tedy snadno ukázat, že existuje $M > 0$ t.ž. $|x|, |y| < M$. Platí $1 - M - M < z = 1 - x - y < 1 + M + M$. Tedy $K = \max\{|1 - M - M|, 1 + M + M\}$ platí, že $|z| < K$. Z toho plyne, že

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \sqrt{M^2 + M^2 + K}$$

tedy $M \subseteq B(0, \sqrt{M^2 + M^2 + K})$ a mn. M je om.

Z Věty 12 nyní plyne, že je M kompaktní.

Příklad 1 (p) $M = [x + y + z = 0, x^2 + y^2 - z = 0]$

Uzavřenost M se ověří klasicky.

Ověřme omezenost množiny M . Nechtě $(x, y, z) \in M$.

Jelikož $z = x^2 + y^2$, platí, že $x + y + x^2 + y^2 = 0$, z čehož plyne, že $(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$. Dá se snadno odvodit, že $x^2 + y^2$ je om., tedy i z je om., tedy lze ukázat, že i M je om.

Z Věty 12 nyní plyne, že je M kompaktní.

Příklad 1 (q) $M = [x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 2]$

Uzavřenost M se ověří klasicky.

Zřejmě $M \subseteq B(0, 5)$.

Z Věty 12 nyní plyne, že je M kompaktní.

Příklad 2 (a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-1}}{1-x^2}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x^3-1}}{1-x^2} \right)' = \frac{(\sqrt{x^3-1})' \cdot (1-x^2) - \sqrt{x^3-1} \cdot (1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} (3x^2) \cdot (1-x^2) - \sqrt{x^3-1} (-2x)}{(1-x^2)^2} = \\
&= \frac{3x^2 \cdot (1-x^2) + 4x \cdot (x^3-1)}{2(x^2-1)^2 \cdot \sqrt{x^3-1}} = \\
&= \frac{x^4 + 3x^2 - 4x}{2((x-1)(x+1))^2 \cdot \sqrt{x^3-1}} = \frac{x^3 + x^2 + 4x}{2(x-1)(x+1)^2 \sqrt{x^3-1}}
\end{aligned}$$

V posledním kroku jsme využili toho, že

$$(x^4 + 3x^2 - 4x) : (x-1) = x^3 + x^2 + 4x.$$

Příklad 2 (b) $f(x) = \log(\cos(e^x))$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\log(\cos(e^x)))' = \frac{1}{\cos(e^x)} \cdot (\cos(e^x))' = \frac{1}{\cos(e^x)} \cdot (-\sin(e^x)) \cdot e^x = \\
&= -\tan(e^x) \cdot e^x
\end{aligned}$$

Příklad 2 (c) $f(x) = (\cos(2x) - e^{2x})^{-3}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= ((\cos(2x) - e^{2x})^{-3})' = -3 \cdot (\cos(2x) - e^{2x})^{-4} \cdot (\cos(2x) - e^{2x})' = \\
&= -3 \cdot (\cos(2x) - e^{2x})^{-4} \cdot (-\sin(2x) \cdot 2 - 2e^{2x}) = \\
&= 6 \cdot (\cos(2x) - e^{2x})^{-4} \cdot (\sin(2x) + e^{2x})
\end{aligned}$$

Příklad 2 (d) $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \log(x^3 - 2x + 1)$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \log(x^3 - 2x + 1) \right)' = \\
&= \left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right) \right)' \cdot \log(x^3 - 2x + 1) + \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (\log(x^3 - 2x + 1))'
\end{aligned}$$

Spočítejme derivace v posledním řádku.

$$\begin{aligned}
\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right) \right)' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

$$(\log(x^3 - 2x + 1))' = \frac{1}{(x^3 - 2x + 1)} \cdot (x^3 - 2x + 1)' = \frac{3x^2 - 2}{(x^3 - 2x + 1)}$$

$$f'(x) = \frac{\log(x^3 - 2x + 1)}{x\sqrt{x^2 - 1}} + \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{3x^2 - 2}{(x^3 - 2x + 1)}$$

Příklad 3 (a) $f(x, y) = 35x - 4y^2 + 3x^2y$

$D(f) = \mathbb{R}^2$

Vypočtěme $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ - tj. zderivujeme $f(x, y)$ podle x a předstírejme, že y je jen číslo.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial(35x)}{\partial x} - \frac{\partial(4y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(3x^2y)}{\partial x} = 35 - 0 + 6xy = 6xy + 35$$

Dále počítejme $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ - tj. předstírejme, že x je číslo a derivujeme podle proměnné y .

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial(35x)}{\partial y} - \frac{\partial(4y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(3x^2y)}{\partial y} = 0 + 8y + 3x^2 = 8y + 3x^2$$

Obě derivace jsou definované na celém $D(f)$, tedy máme hotovo.

Příklad 3 (b) $f(x, y) = \frac{\sin y^2}{x}$

$D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin y^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\sin y^2}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\sin y^2) = \frac{1}{x} \cdot \cos y^2 \cdot 2y = \frac{2y \cos y^2}{x}$$

Obě derivace jsou definované na celém $D(f)$, tedy máme hotovo.

Příklad 3 (c) $f(x, y) = e^{xy} + \sin(x + y)$

$D(f) = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy} + \cos(x + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} + \cos(x + y)$$

Obě derivace jsou definované na celém $D(f)$, tedy máme hotovo.

Příklad 3 (d) $f(x, y) = x \tan \frac{x}{y}$

Funkce $\tan$ není definována pro hodnoty $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tedy $\frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Navíc $y \neq 0$ (podmínka ze zlomku).

$$D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, \frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 \cdot \tan \frac{x}{y} + x \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \tan \frac{x}{y} + \frac{x}{y \cos^2 \frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{-x^2}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}}$$

Obě derivace jsou definované na celém $D(f)$, tedy máme hotovo.

Příklad 3 (e) $f(x, y) = x^y$

$D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, neb obecná mocnina je definována jen pro kladná x .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{y \cdot \log x} \right) = e^{y \cdot \log x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (y \cdot \log x) = e^{y \cdot \log x} \cdot \frac{y}{x} = x^y \cdot \frac{y}{x} = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{y \cdot \log x} \right) = e^{y \cdot \log x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot \log x) = e^{y \cdot \log x} \cdot \log x = x^y \log x$$

Obě derivace jsou definované na celém $D(f)$, tedy máme hotovo.

Příklad 3 (f) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

$D(f) = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}$$

Právě spočítaná derivace je definována pro $\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2} \neq 0$, tj. pro $x \neq -y$. Pro $x = -y$ je třeba derivaci podle x spočítat zvlášť. Zvolme tedy $y \in \mathbb{R}$ a zkusme z definice počítat $f'_x(-y, y)$.

$$\begin{aligned} f'_x(-y, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(-y + t, y) - f(-y, y)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(t - y)^3 + y^3} - \sqrt[3]{(-y)^3 + y^3}}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^3 - 3t^2y + 3ty^2 - y^3 + y^3} - \sqrt[3]{y^3 - y^3}}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{t^3 - 3t^2y + 3ty^2}{t^3}} \stackrel{\text{spoj.}}{=} \sqrt[3]{\lim_{t \rightarrow 0} 1 - \frac{3y}{t} + \frac{3y^2}{t^2}} \end{aligned}$$

Poslední limita vychází jako reálné číslo pouze pro $y = 0$. Tedy pro $f'_x(0, 0) = 1$ a pro $y \neq 0$ $f'_x(-y, y)$ neexistuje.

Jelikož platí $f(x, y) = f(y, x)$, tak platí, že $f'_y(x, y) = f'_x(y, x)$, a proto pro $x \neq -y$ platí následující.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}$$

Stejným způsobem se ukáže, že $f'_y(-y, y)$ neexistuje pro $y \neq 0$ a je rovna 1 pro $y = 0$. Tím jsme vyřešili derivaci na celém, $D(f)$ a máme hotovo.

Alternativně lze využít toho, že funkce f je v bodech $(-t, t)$ pro $t \in \mathbb{R}$ spojitá podle proměnné x . Můžeme totiž využít Věty 44 - ZS.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-t, t) = \lim_{x \rightarrow -t} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \lim_{x \rightarrow -t} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + t^3)^2}} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1, & t = 0, \\ \text{„}\frac{t^2}{\pm 0}\text{“} & \text{tedy neexistuje, } t \neq 0 \end{cases}$$

Příklad 3 (g) $f(x, y) = |x| \cdot |y|$

$D(f) = \mathbb{R}^2$

K výpočtení f'_x si výpočet rozdělme na tři části:

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cdot |y|, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x \cdot |y|, & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot |y|) = |y|, \quad x > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(-x \cdot |y|) = -|y|, \quad x < 0$$

Počítejme $f'_x(0, y)$. Jelikož je zřejmě funkce f v bodě $(0, y)$ spojitá pro libovolné y , můžeme použít větu o spojitosti derivace. Z té vyplývá, že $f_x^{'+}(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0+} f'_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0+} |y| = |y|$. Podobně $f_x'^-(0, y) = -|y|$. Pokud tedy $y \neq 0$, pak $f'_x(0, y)$ neexistuje. Naopak $f'_x(0, 0) = 0$.

Za využití zřejmého vztahu $f(x, y) = f(y, x)$ dostáváme následující.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot |x|) = |x|, \quad y > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(-y \cdot |x|) = -|x|, \quad x < 0$$

A pokud $x \neq 0$, pak $f'_y(x, 0)$ neexistuje. Naopak $f'_y(0, 0) = 0$.

Tím jsme vyřešili derivaci na celém, $D(f)$ a máme hotovo.

Příklad 3 (h) $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + y} \cdot \log(x^2 + y^2), & [x, y] \neq [0, 0] \\ 0, & [x, y] = [0, 0] \end{cases}$

$D(f) = \mathbb{R}^2$

Pro $[x, y] \neq [0, 0]$ platí následující.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \left(\frac{\log(x^2 + y^2)}{3\sqrt[3]{(x^2 + y)^2}} + \frac{\sqrt[3]{x^2 + y}}{x^2 + y^2} \right)$$

Právě spočtená derivace je definována pro $y \neq -x^2$. Pro $y = -x^2$ je třeba derivaci spočítat zvlášť - z definice (nemáme dokázanu spojitost f v bodě $[0, 0]$).

Pro $y = -x^2$ (tedy máme zahrnut i bod $[x, y,] = [0, 0]$) platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^2 + 2xt} \log((x+t)^2 + x^4)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^2 + 2xt} \log(x^2 + x^4 + 2xt + t^2)}{t} \end{aligned}$$

Je-li $x^2 + x^4 \neq 1$, pak $\log(x^2 + x^4 + 2xt + t^2) \rightarrow \log(x^2 + x^4) \neq 0$. Navíc platí, že $\frac{\sqrt[3]{t^2 + 2xt}}{t} = \sqrt[3]{\frac{t^2 + 2xt}{t^3}} = \sqrt[3]{\frac{t + 2x}{t^2}} \rightarrow \frac{2x}{+0} = \text{sign}(x) \cdot \infty$. Z toho nyní plyne, že pro $x^2 + x^4 \neq 1$ derivace f'_x v bodě $(x, -x^2)$ neexistuje.

Je-li $x^2 + x^4 = 1$, pak $\frac{\sqrt[3]{t^2 + 2xt} \log(x^2 + x^4 + 2xt + t^2)}{t} \rightarrow \frac{0}{0}$. Použijeme tedy l'Hospitalovo pravidlo (známé z minulého semestru) a počítáme dál. Dostáváme následující limitu (za využití vztahu $x^2 + x^4 = 1$).

$$\lim_{t \rightarrow 0} (2x + 2t) \cdot \left(\frac{\log(1 + 2xt + t^2)}{3\sqrt[3]{(2xt + t^2)^2}} + \frac{\sqrt[3]{2xt + t^2}}{t^2 + 2xt + 1} \right)$$

Platí, že $\frac{\sqrt[3]{2xt + t^2}}{t^2 + 2xt + 1} \rightarrow \frac{0}{1}$ pro $t \rightarrow 0$.

Platí, že $\frac{\log(1 + 2xt + t^2)}{3\sqrt[3]{(2xt + t^2)^2}} \rightarrow \frac{0}{0}$, použijeme tedy opět l'Hospitalovo pravidlo a dostáváme násl.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{2t + 2x}{1 + 2xt + t^2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3} \frac{2x + 2t}{\sqrt[3]{2xt + t^2}}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{2xt + t^2}}{1 + 2xt + t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{1} = 0$$

Derivace podle y se spočte analogicky.

Příklad 3 (i) $f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2 + xy + y^2}}, & [x, y] \neq [0, 0] \\ 0, & [x, y] = [0, 0] \end{cases}$

$D(f) = \mathbb{R}^2$

Pro $[x, y] \neq [0, 0]$ platí násl.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{\frac{-1}{x^2 + xy + y^2}} \cdot \frac{1}{(x^2 + xy + y^2)^2} \cdot (2x + y)$$

Pro $[x, y] = [0, 0]$ je třeba spočítat f'_x zvlášť.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{-1}{(0+t)^2+t \cdot 0+0^2}} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{-1}{t^2}}}{t} = 0$$

Proto $f'_x(0, 0) = 0$. Výpočet f'_y je obdobný.